Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"
Proba pe echipe, clasele VII-VIII
27 octombrie 2013

Soluţii

RUNDA a II-a

Problema 1. Să se determine toate numerele naturale impare, pătrate perfecte, care împărţite la 16 dau câturi numere prime.

Soluţie: Numerele impare au una din formele $8r+1, 8r+3, 8r+5, 8r+7$.

$Dacă\ n=8r+1 \Rightarrow n^2=64r^2+16r+1=16\cdot r\cdot(4r+1)+1;$

Câtul împărţirii lui n^2 la 16 este $r\cdot(4r+1)$, care este număr prim pentru r=1. In acest caz $n^2=81$.

$Dacă\ n=8r+3 \Rightarrow n^2=64r^2+48r+9=16\cdot r\cdot(4r+3)+9;$

Câtul împărţirii lui n^2 la 16 este $r\cdot(4\cdot r+3)$, care este număr prim pentru r=1. In acest caz $n^2=121$.

$Dacă\ n=8r+5 \Rightarrow n^2=64r^2+80r+25=16\cdot(4r^2+5r+1)+9=16\cdot(4r+1)\cdot(r+1)+9;$

Câtul împărţirii lui n^2 la 16 este $(r+1)(4\cdot r+1)$, care nu este număr prim, $\forall r\in\mathbb{N}$.

$Dacă\ n=8r+7 \Rightarrow n^2=64r^2+112r+49=16\cdot(4r^2+7r+3)+1=16\cdot(4r+3)\cdot(r+1)+1;$

Câtul împărţirii lui n^2 la 16 este $(r+1)(4\cdot r+3)$, care este număr prim pentru r=0. In acest caz $n^2=49$.

Răspuns: 81,121,49

Problema 2. Să se determine numerele naturale a şi b astfel încât $a^2-b^2=6480$ şi cel mai mare divizor comun al lor este 12.

Soluţie: Din enunţ rezultă $a=12\cdot x, b=12\cdot y, (x,y)=1$.

Atunci relaţia devine:

$144x^2-144y^2=6480 \Leftrightarrow x^2-y^2=45 \Leftrightarrow (x-y)\cdot(x+y)=45 \Rightarrow$

$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=23 \\ y=22 \end{cases}$

$\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=6 \end{cases} (nu\ convine)$

$\begin{cases} x-y=5 \\ x+y=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=2 \end{cases}$

In concluzie $\begin{cases} a=276 \\ b=264 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a=84 \\ b=24 \end{cases}$.

Răspuns:
$\begin{cases} a = 276 \\ b = 264 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a = 84 \\ b = 24 \end{cases}$.

Problema 3. Pe latura $[BC]$ a triunghiului ABC se consideră punctele D şi E astfel încât $[BD] \equiv [DE] \equiv [EC]$. Mediana $[BB']$ intersectează pe AD în M şi pe AE în P, iar mediana $[CC']$ intersectează pe AE în N şi pe AD în Q. Să se calculeze raportul dintre aria patrulaterului $MNPQ$ şi aria triunghiului ABC.

Soluţie: Aplicăm teorema lui Menelaus pentru triunghiul ADC şi transversala $B - M - B'$:

$\frac{AM}{MD} \cdot \frac{BD}{BC} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1 \Rightarrow \frac{AM}{MD} = 3$. La fel $\frac{AN}{NE} = 3$.
Apoi pentru triunghiul AEC şi transversala $B - P - B'$:

$\frac{AP}{PE} \cdot \frac{BE}{BC} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{PE} = \frac{3}{2}$.

La fel $\frac{AQ}{QD} = \frac{3}{2}$.

Atunci $S_{AMN} = \frac{9}{16} \cdot S_{ADE}$ şi $S_{AQP} = \frac{9}{25} \cdot S_{ADE}$

$S_{MNPQ} = \left(\frac{9}{16} - \frac{9}{25} \right) \cdot S_{ADE} = \frac{81}{400} \cdot S_{ADE} = \frac{81}{400} \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} = \frac{27}{400} \cdot S_{ABC}$

Raportul căutat este $\frac{27}{400}$.

Răspuns: $\frac{27}{400}$